Aula 4: Sistemas de massa variável e Lagrangeanos gerais em 1D

Refs: Schaub, "Analytical Mechanics of Space systems"

Peraire + Widnall, MIT course "Dynamics" 16.07, Fall 2008, lecture 14

Leubner + Krumm, Eur. J. Phys 11, 31 (1990)

McIver, J. Eng. Math. 7, 249 (1973)

Um tipo de sistema não coberto pela teoria acima é aquele em que as massas de um ou mais corpos variam no tempo. Exemplos típicos incluem

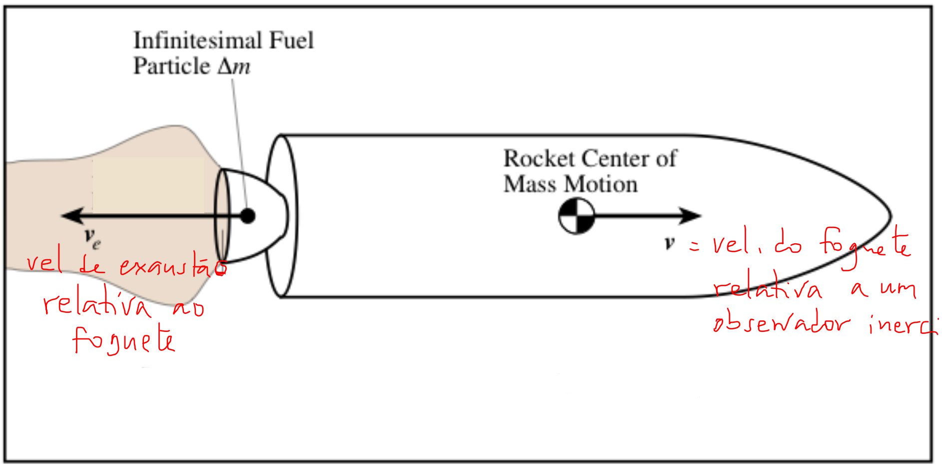
- foguetes, ou outros sistemas de propulsão por exaustão
- sistemas que soltam ou recolhem cabos ou cordas
- sistemas que recolhem ou vazam líquidos

Vamos inicialmente analisar exemplos de tais sistemas usando o formalismo Newtoniano elementar, e depois ver como eles podem ser tratados no formalismo Lagrangeano

Foguetes

Em 1903, o visionário russo K. Tsiolkovsky publicou pela primeira vez uma análise do movimento de um míssil auto-propelido por emissão de massa, derivando o que veio a ser conhecida como a "equação do foguete". (mais tarde descobriu-se que a mesma equação já vinha sendo usada, secretamente há quase 1 século pelos militares britânicos, porém sem pretensões a viagens espaciais)

Foguete se movendo



O sistema de interesse corresponde ao foguete mais o combustível ainda não expelido.

Suponhamos que, num intervalo Δt, o foguete expele uma massa $\Delta m < 0$ com vel. $\vec{v}_e$.

p/ poder interpretar como $m_f - m_i$

Se $\vec{F}_{TOT}$ é a força externa total sobre o sistema, a 2ª lei implica que, nesse intervalo,

$$\vec{F}_{TOT}\Delta t = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) = (m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) - \Delta m(\vec{v}+\vec{v}_e) - m\vec{v}$$

$$= m\Delta\vec{v} + \Delta m\,\vec{v}_e - \Delta m\,\Delta\vec{v}$$

Assim, tomando o limite $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{tot} + \frac{dm}{dt}\vec{v}_e}$$

Eq. do foguete

A "força de impulso estática" $\vec{F}_s = \frac{dm}{dt}\vec{v}_e$ representa a força exercida sobre o foguete na ausência de outras forças externas (p. exemplo, se ele estiver no espaço profundo). Também pode ser visto como a força necessária para manter o foguete <u>imóvel</u> numa área de teste.

Considerando o caso em que : i) $\vec{v}_e$ é fixa no tempo

ii) $\vec{v}_e$ aponta na direção oposta a $\vec{v}$

iii) $\vec{F}_e = 0$ (ie, longe de planetas, etc)

então o movimento é 1D, com

$$m\frac{dv}{dt} = F_s = -\frac{dm}{dt}v_e \implies \boxed{m\frac{dv}{dm} = -v_e}$$

Integrando

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = -v_e\int_{m_0}^{m_f}\frac{dm}{m} \longrightarrow \Delta v = -v_e \ln\left(\frac{m_f}{m_0}\right)$$

considerando que $m_f < m_0$ e def $m_f \equiv m_0(1-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, então

$$\boxed{\Delta v = v_e \ln\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)}$$ Eq. de Tsiolkovsky

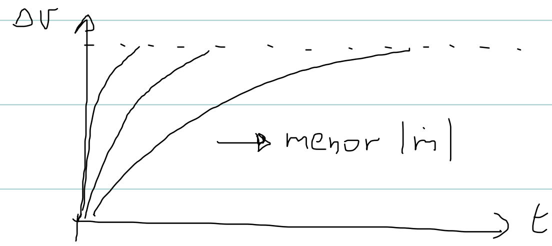
Obs:

i) O ganho de veloc. do foguete depende da fração ε do combustível inicial que é expelida, mas não do tempo total gasto para realizar isso.

Em outras palavras, se a taxa $\dot{m}$ for variada, mas o tempo total também, de forma a produzir a mesma variação total da massa, então Δv será o mesmo. Em particular, uma sequência de diversas "queimas" de combustível, passando de $m_0 \to m_1 \to m_2 \cdots \to m_n \equiv m_f$, produzindo em cada uma variações $\Delta v_1, \ldots, \Delta v_n$, resultará na mesma variação $\Delta v = \sum_i \Delta v_i$ que seria obtida em uma só "queima" ininterrupta.

ii) Claro que o tempo necessário p/ atingir Δv dependerá de $\dot{m}$. P. exemplo, se $\dot{m} = \text{cte} \ (<0)$, de modo que $m = m_0 + \dot{m} t$ então

$$v(t) = v_0 - v_e \ln\left(1 + \frac{\dot{m}}{m_0} t\right)$$



iii) Visto de outra forma, quanto maior for v_e, para um mesmo m_0, maior será a massa final m_f que poderá ser acelerada de um dado Δv.

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta v}{v_e}}$$

ex: foguetes químicos: $v_e \lesssim 4500$ m/s ; motor a íons: $v_e \sim 10^5$ m/s [Deep Space 1, Dawn, NeXT]

→ motores iônicos permitem vel. finais muito maiores! Mas tb têm $\dot{m}$ muito menor, de modo que leva muito mais tempo!

Incluindo gravidade (contrária ao mov. e constante): $m\dfrac{dv}{dt} = -v_e\dfrac{dm}{dt} - mg$

Assumindo que $v_e|\dot m(0)| > m(0)g$ (se não, o foguete não sai do lugar, fica apenas "queimando" combustível parado), então podemos integrar, obtendo

$$\Delta v = -v_e \ln\left(\frac{m_f}{m_0}\right) - gt$$

Assumindo ainda $\dot m$ = cte: $\boxed{\Delta v = -v_e \ln\left(\frac{m_f}{m_0}\right) - g\left(\frac{m_f - m_0}{\dot m}\right)}$

Agora <u>não</u> é mais verdade que Δv é sempre o mesmo, independente de $\dot m$.

<u>Estágios</u>: Até hoje, nenhum foguete de um só estágio jamais alcançou a órbita terrestre. O motivo é simples: à medida em que o propelente do foguete vai sendo ejetado, torna-se sem sentido continuar carregando (e acelerando) partes da estrutura/tanques de combustível já esvaziados.

Exemplo: comparar (numa situação sem gravidade, por simplicidade) qual fração de massa é possível se acelerar diretamente até a vel. final de 10^4 m/s com um foguete de estágio único, comparado a um foguete de 2 estágios no qual primeiro acelera-se até $5\cdot 10^3$ m/s, em seguida abandona-se um primeiro tanque de combustível, e depois acelera-se novamente até a vel. final. Suponha $v_e = 4{,}5 \cdot 10^3$ m/s e que a massa <u>seca</u> m_T do(s) tanque(s) de combustível (ie, qdo vazios) corresponda a 10% da massa total inicial do foguete, sendo que no caso de 2 estágios 7% estão no 1° tanque e 3% no 2°

1 estágio: $\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{10^4}{4{,}5 \cdot 10^3}} \simeq 0{,}11 \rightarrow m_f - m_T = \boxed{0{,}01 m_0}$! (só 1% de massa útil!)

2 estágios: 1ª queima: $\frac{m_{f_1}}{m_0} = e^{-\frac{5000}{4500}} \sim 0{,}33$

2ª queima: $\frac{m_{f_2}}{m_{f_1} - m_{e_1}} = e^{-\frac{5000}{4500}} \rightarrow m_{f_2} = 0{,}33 \cdot (0{,}26) m_0 \simeq \underline{0{,}086\, m_0}$

descontando a massa do 2° tanque, sobram $\boxed{0{,}056 m_0 !}$

Na presença de gravidade, o valor de m_f terá de ser ainda <u>menor</u>, podendo ficar abaixo de m_T ... nesse caso simplesmente não é possível acelerar qualquer massa útil até a vel. final desejada!

Tratamento Lagrangeano (cf. Leubner + Krumm, Eur. J. Phys. 1990)

E' possível construir lagrangeanos para sistemas de massa variável

Por exemplo, a eq. acima p/ um foguete, com $\dot{m} = -\mu_0 = \text{cte}$, sob gravidade g constante, emitindo combustível com vel. $v_{rel}(t)$ pode ser obtida a partir de

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \left[\frac{\mu_0 v_{rel}}{m(t)} - g\right] x$$

checando: $0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \ddot{x} + g - \frac{\mu_0 v_{rel}}{m(t)} \longrightarrow \boxed{m(t)\ddot{x} = -m(t)g + \mu_0 v_{rel}(t)}$

[note que esta eq. não seria obtida de $\mathcal{L}' = m(t)\mathcal{L} = \frac{m(t)\dot{x}^2}{2} - \left[\mu_0 v_{rel} - m(t) g\right] x = T(t) - V(t)$

$\longrightarrow$ os dois lagrangeanos não são equivalentes!]

De modo geral, podemos escrever a eq. de movimento p/ um sistema 1D de massa variável, no qual no instante t uma massa dm é adicionada com velocidade $u(x, \dot{x}, t)$, na forma

$$(m(t) + dm)(\dot{x} + d\dot{x}) - \left[m(t)\dot{x} + dm\, u(x, \dot{x}, t)\right] = F(x, \dot{x}, t)\, dt$$

ou $$m(t)\ddot{x} = \underbrace{F(x, \dot{x}, t) + \frac{dm}{dt}\overbrace{\left[u(x, \dot{x}, t) - \dot{x}\right]}^{v_{rel}(x, \dot{x}, t)}}_{\equiv \tilde{F}(x, \dot{x}, t)}$$ [mesma eq. geral vista acima]

Vamos agora mostrar que para toda eq. dessa forma é possível construir um Lagrangeano. Em geral este L <u>não</u> terá a forma $T-V$ típica. Note que isto inclui também todos os sistemas 1D com massa <u>constante</u>, inclusive aqueles sofrendo forças $F(x,\dot{x},t)$ dependentes explicitamente da velocidade ou do tempo.

1º passo: usando a notação $A_b \equiv \frac{\partial A}{\partial b}$ e tb $\ddot{x} = \frac{\tilde{F}}{m}$, a eq. de Lagrange fica

$$0 = \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} - L_x = L_{\dot{x}x}\dot{x} + L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} + L_{\dot{x}t} - L_x \Rightarrow \boxed{L_x - L_{\dot{x}x}\dot{x} - L_{\dot{x}t} = L_{\dot{x}\dot{x}} \frac{\tilde{F}(x,\dot{x},t)}{m(t)}}$$

2º passo: derivando essa eq. c/ respeito a $\dot{x}$, e definindo $\Lambda(x,\dot{x},t) \equiv L_{\dot{x}\dot{x}}$:

$$\cancel{L_{x\dot{x}}} - \cancel{L_{\dot{x}x}} - L_{\dot{x}\dot{x}x}\dot{x} - L_{\dot{x}\dot{x}t} = L_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} \frac{\tilde{F}}{m} + L_{\dot{x}\dot{x}} \frac{\tilde{F}_{\dot{x}}}{m}$$

$$\Rightarrow \Lambda_{\dot{x}} \frac{\tilde{F}}{m} + \Lambda_x \dot{x} + \Lambda_t = -\Lambda \frac{\tilde{F}_{\dot{x}}}{m} \qquad (*)$$

3º passo: usando novamente $\frac{\tilde{F}}{m} = \ddot{x}$ e notando que o 1º termo é uma derivada total, chegamos a

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Lambda(x,\dot{x},t) = -\Lambda \frac{\tilde{F}_{\dot{x}}}{m}}$$

Assim, para encontrarmos L, devemos 1º resolver esta eq., obtendo $\Lambda(x,\dot{x},t)$, e em seguida integrar 2 vezes com respeito a $\dot{x}$.

Formalmente: dada qq função $\Lambda(x,\dot{x},t)$, um lagrangeano satisfazendo $L_{\dot{x}\dot{x}} = \Lambda$

e tb a eq. de Lagrange $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = L_x$ tem a forma geral [eq 9 em L+K]:

$$\boxed{L(x,\dot{x},t) = \int_{v_0}^{\dot{x}} (\dot{x}-v)\,\Lambda(x,v,t)\,dv + \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} \tilde{F}(\bar{x},v_0,t)\,\Lambda(\bar{x},v_0,t)\,d\bar{x} + \frac{d}{dt}\phi(x,t)} \quad (1)$$

onde $\tilde{F} = m\ddot{x}$; x_0, v_0 são constantes arbitrárias que podem ser ambas escolhidas $=0$, e ϕ tb é arbitrária

Antes de demonstrar essa eq., vamos estudar alguns exemplos

a) Eq. do foguete, novamente: assumindo como antes $\frac{\tilde{F}}{m} = -g + \frac{M_0 v_{rel}(t)}{m(t)}$, então $\tilde{F}_{\dot{x}} = 0$ [note que isso vale p/ qq $\tilde{F}$ independente de $\dot{x}$]. Assim: $\frac{d\Lambda}{dt} = 0 \rightarrow \Lambda = cte = c$ $(\neq 0)$

Substituindo acima: $L = c\int_0^{\dot{x}} (\dot{x}-v)\,dv + \frac{c}{m}\int_0^{x} \tilde{F}(\bar{x},v_0,t)\,d\bar{x} + \frac{d\phi}{dt}(x,t)$

$$\therefore\ L = c\left[\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}^2}{2} - \left[g - \frac{M_0 v_{rel}}{m(t)}\right]x\right] + \frac{d\phi}{dt}$$

Desconsiderando a derivada total $\frac{d\phi}{dt}$, e usando o fato de que L e cL levam a eqs. de Lagrange com as mesmas soluções, recuperamos o mesmo lagrangeano de antes.

b) Sistema sofrendo uma força de amortecimento da forma $F_{at} = -b\dot{x}$, em adição a qualquer outra força $\tilde{F}_0(x,t) = F_0(x,t) - \frac{dm}{dt} v_{rel}(x,t)$ que seja <u>independente</u> de $\dot{x}$. Nesse caso: $\boxed{\frac{d\Lambda}{dt} = -\Lambda \frac{\tilde{F}_{\dot{x}}}{m} = \frac{\Lambda b}{m(t)}}$

Para poder dizer mais, precisamos assumir algo sobre $m(t)$

b1) Ex: se $m(t) = m = cte$: $\Lambda(t) = C e^{\frac{bt}{m}}$

$$\therefore L(x,\dot{x},t) = C e^{\frac{bt}{m}} \left[\frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^{x} \frac{F_0}{m}(\bar{x},t)\, d\bar{x} \right] + \frac{d\phi}{dt} = \frac{C}{m} e^{\frac{bt}{m}} L_0 + \frac{d\phi}{dt}$$

onde L_0 é o Lagrangeano que seria obtido na ausência da fça de atrito.

$\therefore$ desconsiderando ϕ e C, $\boxed{L(x,\dot{x},t) = e^{bt} L_0(x,\dot{x},t)}$

Assim, por exemplo: o Lagrangeano para uma partícula sofrendo uma força conservativa $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$ mais a força de atrito $F_{at} = -b\dot{x}$ será $L = e^{\frac{bt}{m}} \left[T - V(x) \right]$

ex: $L = e^{\frac{bt}{m}} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right] \longrightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{bt}{m}} m\dot{x} \right] = -kx \longrightarrow m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$ osc. harmônico amortecido b2) Se $\boxed{m(t) = m_0 - \mu_0 t}$: $\dfrac{d\Lambda}{dt} = \dfrac{b}{m_0 - \mu_0 t}\Lambda$

Solução: $\boxed{\Lambda = m(t)^{-\frac{b}{\mu_0}}} \Rightarrow \Lambda' = -\dfrac{b}{\mu_0}\, m(t)^{\left[-\frac{b}{\mu_0} - 1\right]} \cdot \cancel{m'(t)}^{-\mu_0} = \dfrac{b\Lambda}{m(t)}$

Nesse caso, substituindo em (1) e fazendo o mesmo cálculo do ex. (b1), já ignorando novamente o termo $\dfrac{d\phi}{dt}$, obtemos

$$L(x,\dot{x},t) = m(t)^{-\frac{b}{\mu_0}}\left[\frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^{x} \frac{\tilde{F}_0}{m}(\bar{x},t)\, d\bar{x}\right] = m(t)^{-b/\mu_0} L_0$$

, onde novamente L_0 é a lagrangiana na ausência de atrito. Em particular, no caso do foguete num campo gravitacional e sujeito a atrito:

$$\boxed{L(x,\dot{x},t) = (m_0 - \mu_0 t)^{-b/\mu_0}\left[\frac{\dot{x}^2}{2} - \left[g - \frac{\mu_0 v_{rel}}{m_0 - \mu_0 t}\right]x\right]}$$

Demonstração de (1)

Notando que: $\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}} \displaystyle\int_a^{\dot{x}} f(\dot{x},v)\,dv = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_a^{\dot{x}+\varepsilon} f(\dot{x}+\varepsilon,v)\,dv - \int_a^{\dot{x}} f(\dot{x},v)\,dv\right]$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{\dot{x}} \frac{f(\dot{x}+\varepsilon,v)-f(\dot{x},v)}{\varepsilon}\,dv + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\dot{x}}^{\dot{x}+\varepsilon} f(\dot{x},v)\,dv = \int_a^{\dot{x}} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\dot{x},v)\,dv + f(\dot{x},\dot{x})$$

Então $\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}} \displaystyle\int_{v_0}^{\dot{x}} (\dot{x}-v)\Lambda(x,v,t)\,dv = \int_{v_0}^{\dot{x}} \Lambda(x,v,t)\,dv \qquad (2)$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2}\left(\quad '' \quad \right) = \Lambda(x,\dot{x},t)$$

Assim, escolhendo $\boxed{L = \displaystyle\int_{v_0}^{\dot{x}} (\dot{x}-v)\Lambda(x,v,t)\,dv + \dot{x}\,g(x,t) + h(x,t)} \quad (3)$

implica $L_{\dot{x}\dot{x}} = \Lambda$, para qq v_0, g, h.

Podemos simplificar um pouco essa expressão, eliminando o termo $\dot{x}g$

i) redefina $\bar{h}(x,t) \equiv h(x,t) - \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{x},t)\,d\bar{x}$, de modo que

$$\bar{h} + \frac{d}{dt}\left[\int_{x_0}^{x} g(\bar{x},t)\,d\bar{x}\right] = \bar{h} + g\dot{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{x},t)\,d\bar{x} = h + g\dot{x}$$

Definindo $\phi \equiv \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(\bar{x},t)\,d\bar{x}$, podemos assim reescrever (3) acima na forma

$$\boxed{L = \int_{v_0}^{\dot{x}} (\dot{x}-v)\Lambda(x,v,t)\,dv + \bar{h}(x,t) + \frac{d\phi}{dt}(x,t)} \quad (4)$$

Ainda temos de impor que L satisfaça a eq. de Lagrange. Notando (v. sec. 2.3) que se isso é verdade p/ L tb vale p/ $L - \frac{d\phi}{dt}$, então podemos desprezar esse último termo na nossa análise. Considere então

$$L_x = \int_{v_0}^{\dot{x}} (\dot{x}-v)\,\Lambda_x(x,v,t)\,dv + \bar{h}_x \qquad \text{e} \qquad L_{\dot{x}} \overset{\text{v. (2)}}{=} \int_{v_0}^{\dot{x}} \Lambda(x,v,t)\,dv$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = L_{\dot{x}\dot{x}}\,\ddot{x} + L_{\dot{x}x}\,\dot{x} + L_{\dot{x}t} = \Lambda\ddot{x} + \int_{v_0}^{\dot{x}} \dot{x}\Lambda_x\,dv + \int_{v_0}^{\dot{x}} \Lambda_t\,dv$$

Assim, se $\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = L_x$: $\quad \bar{h}_x = \int_{v_0}^{\dot{x}} \left[v\Lambda_x(x,v,t) + \Lambda_t \right] dv + \Lambda\ddot{x}$

Agora, pela eq. (*) [5 páginas atrás] : $\quad v\Lambda_x + \Lambda_t = -\frac{1}{m}\left[F_v\Lambda + F\Lambda_v \right]$

Substituindo e usando ainda $\ddot{x} = \frac{F(x,\dot{x},t)}{m}$:

$$\bar{h}_x = -\frac{1}{m}\int_{v_0}^{\dot{x}} F_v\Lambda + F\Lambda_v\,dv + \frac{\Lambda F}{m}\left[x,\dot{x},t\right]$$

Integrando por partes: $\int_{v_0}^{\dot{x}} F_v\Lambda + F\Lambda_v\,dv = \int_{v_0}^{\dot{x}} -\cancel{F\Lambda_v} + \cancel{F\Lambda_v}\,dv + F\Lambda\Big|_{v_0}^{\dot{x}}$

$$\therefore \quad \bar{h}_x = -\frac{1}{m}\left[\cancel{F\Lambda(x,\dot{x},t)} - F\Lambda(x,v_0,t) \right] + \cancel{\frac{1}{m}F\Lambda(x,\dot{x},t)}$$

$$\therefore \quad \bar{h}(x,t) = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} F(\bar{x},v_0,t)\,\Lambda(\bar{x},v_0,t)\,d\bar{x}$$

Substituindo em (4), obtemos finalmente a eq. 1, como desejado!